ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

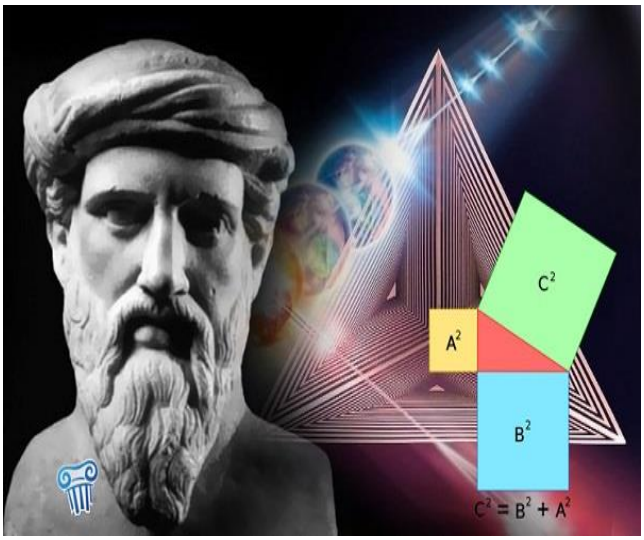
ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

ΙΣΤΟΡΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

5 ΓΕΛ ΤΡΙΚΑΛΩΝ

ΣΧ. ΕΤΟΣ 2021 - 22

Ο Πυθαγόρας- Ιστορική προσέγγιση



Ο Πυθαγόρας ήταν γιος του Μνησάρχου και της Πυθαϊδας, γεννήθηκε στην Σάμο.

Όταν διέδωσε τις γνώσεις του στην Σάμο δεν ήταν κατανοητός από τους ανθρώπους .

Για αυτό πήγε στην Ιταλία (στον Κρότωνα της Κάτω Ιταλίας) όπου και τον υποδέχτηκαν θερμά και εκεί είχε και τους πρώτους μαθητές του.

Ο Πυθαγόρας υπήρξε σημαντικός Έλληνας φιλόσοφος, μαθηματικός, γεωμέτρης και θεωρητικός της μουσικής. Είναι ο κατεξοχήν θεμελιωτής των ελληνικών μαθηματικών, σπουδαίος μαθηματικός και επιστήμονας γνωστός για το Πυθαγόρειο θεώρημα, που έχει το όνομα του.

Δημιούργησε ένα άρτιο σύστημα για την επιστήμη των ουράνιων σωμάτων. Συχνά αναφέρεται πως και ήταν ιδρυτής ενός μυητικού φιλοσοφικού κινήματος που λεγόταν Πυθαγορισμός- Πυθαγόρειοι Φιλόσοφοι.

Πυθαγόρειοι φιλόσοφοι

Οι Πυθαγόρειοι φιλόσοφοι είναι μια φιλοσοφική, θρησκευτική και πολιτική σχολή που ιδρύθηκε τον 6ο αιώνα π.Χ από τον Πυθαγόρα στον Κρότωνα της Κάτω Ιταλίας. Ο Πυθαγόρας δίδασκε τους -και των δυο φύλων- μαθητές του. Η διδασκαλία γινόταν με προφορικό τρόπο και οι προϋποθέσεις για την είσοδο των μαθητών ήταν αυστηρές.

Οι Πυθαγόρειοι απέδιδαν πολύ μεγάλη σημασία στα Μαθηματικά, πρεσβεύοντας ότι αυτά αποτελούν την οδό για την απελευθέρωση της ψυχής. Βάσει της πεποίθησης του Πυθαγόρα πως «τα στοιχεία των αριθμών είναι στοιχεία όλων των όντων», οι Πυθαγόρειοι απέδωσαν στην Αριθμητική μέγιστη σημασία, μελετώντας τις ιδιότητές

της. Ο μαθητής έπρεπε να υιοθετήσει έναν εντελώς διαφορετικό τρόπο ζωής, να ασκηθεί στην εγκράτεια, να τηρεί απόλυτη σιωπή για κάποια έτη, να απέχει από συγκεκριμένες τροφές και να κάνει καθαρμούς.

Οι γνώσεις μας για τους πυθαγόρειους, όπως και για τον ίδιο τον Πυθαγόρα, αντλούνται αποκλειστικά από έργα μεταγενέστερων συγγραφέων, στους οποίους περιλαμβάνονται και οι λεγόμενοι «Νεοπυθαγόρειοι». Αναπόφευκτα λοιπόν, είναι αδύνατον να αποδειχθεί τι πραγματικά ανήκει στη σκέψη του ίδιου του Πυθαγόρα και τι στους μαθητές του.

Δύο εκδοχές υπάρχουν για το θάνατο του:

- Σύμφωνα με το Διογένη Λαέρτιο, οι Κροτωνιάτες τον έσφαξαν μαζί με τετρακόσιους μαθητές του. Ο λόγος της σφαγής του, σύμφωνα πάντα με την ίδια μαρτυρία, είναι ο φόβος της μεγάλης δύναμης που είχε αποκτήσει στην πόλη του Κρότωνα και η συκοφαντία, από εχθρούς του, για την εγκαθίδρυση τυραννίας.
- Σύμφωνα με τον Δικαίαρχο, ο Πυθαγόρας, αφού κατέφυγε στο ιερό των Μουσών στο Μεταπόντιο, μένει σαράντα μέρες νηστικός και πεθαίνει από ασιτία.

Ο Νόμος της Σιωπής

Ο Πυθαγόρας όπως είναι γνωστό επέβαλε τον νόμον της σιωπής σε ότι αφορούσε τις διδασκαλίες του (στον Κρότωνα της νοτίου Ιταλίας). Από εκεί προέρχεται και η λέξη Omertà, που χρησιμοποιεί η μαφία στην Ιταλία. Omertà = κώδιξ τιμής/σιωπής , των λεγομένων «αρρήτων δογμάτων».

Έτσι απαγόρευε στους μαθητές του να αποκαλύπτουν τα διδασκόμενα, καθώς και τις επιτελούμενες ιερουργίες. Τέλος, επέβαλε ατιμωτική έξοδο από την σχολή του σε όσους παρέβαιναν τον «νόμο της σιωπής».

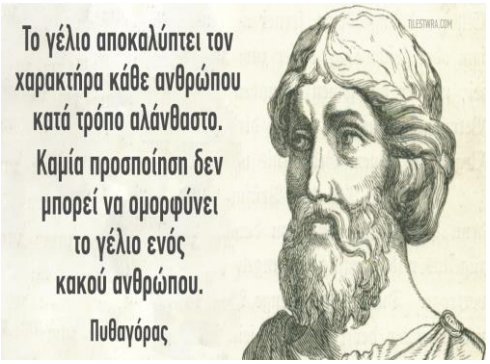
Πυθαγόρεια ρητά

" Τας λεωφόρους μη βαδίζειν "

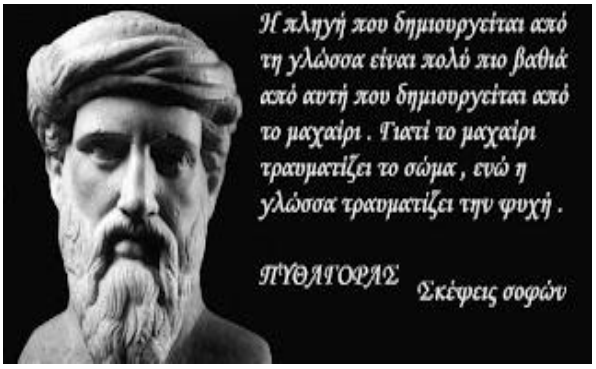
Μη βαδίζεις στους εύκολους δρόμους.

" Βίον αιρείσθαι τον άριστον "

Να διαλέγεις τον άριστο βίο.



" Σιγάν την αλήθειαν χρυσόν εστι θάπτειν "
Το να κρύβεις την αλήθεια είναι σαν να θάβεις χρυσάφι.



" Χρη σιγάν ή κρείσσονα σιγής λέγειν "
Πρέπει να σιωπάς ή να λες λόγια ανώτερα απ' τη σιωπή.

" Εν οργή μήτε λέγειν μήτε πράττειν "
Όταν είσαι οργισμένος ούτε να λες ούτε να ενεργείς.

" Απαιδευσία πάντων παθών μήτηρ "
Η αγραμματοσύνη είναι μητέρα όλων των παθών.

" Δουλεύειν πάθεσι χαλεπώτερον ή τυράννοις "
Περισσότερο οδυνηρό να είσαι δούλος σε πάθη παρά σε τυράννους.

" Έν αρχά πάντων "
Το ένα είναι η αρχή των πάντων.

" Θεός αεί γεωμετρεί "
Ο Θεός πάντοτε γεωμετρεί.

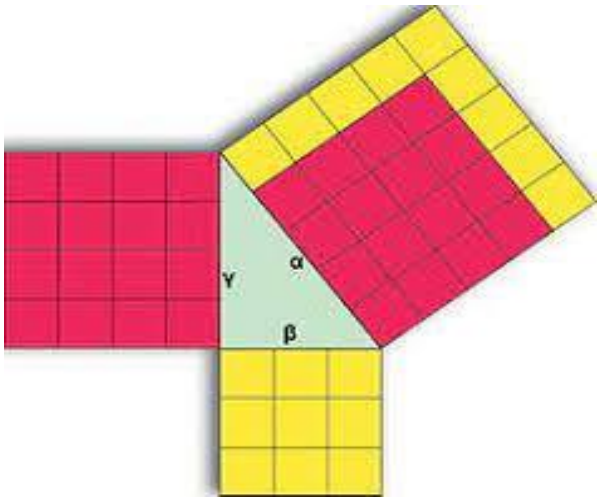
" Αρχή ήμισυ παντός"
Η Αρχή είναι το ήμισυ του παντός

Πυθαγόρειο Θεώρημα–Διατύπωση

Το Πυθαγόρειο θεώρημα ή θεώρημα του Πυθαγόρα ή Θεώρημα της εκατόμβης στα μαθηματικά, είναι σχέση της ευκλείδειας γεωμετρίας ανάμεσα στις πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου. Συνεπώς αποτελεί θεώρημα της επίπεδης γεωμετρίας.

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα, που εξ ονόματος αποδίδεται στον αρχαίο Έλληνα φιλόσοφο Πυθαγόρα:

«**ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις**».



Δηλαδή: «το τετράγωνο της υποτείνουσας (της πλευράς που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία) ενός ορθογώνιου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών».

Το θεώρημα μπορεί να γραφεί ως εξίσωση συσχετίζοντας τα μήκη των πλευρών α ,β και γ, που ονομάζεται πυθαγόρεια εξίσωση:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$

Τη παραπάνω αρχαία διατύπωση της πρότασης του εν λόγω θεωρήματος παρέχει ο Ευκλείδης στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων Γεωμετρίας του (47η πρόταση) με σχετική απόδειξη που κατά παράδοση οφείλεται στον Πυθαγόρα.

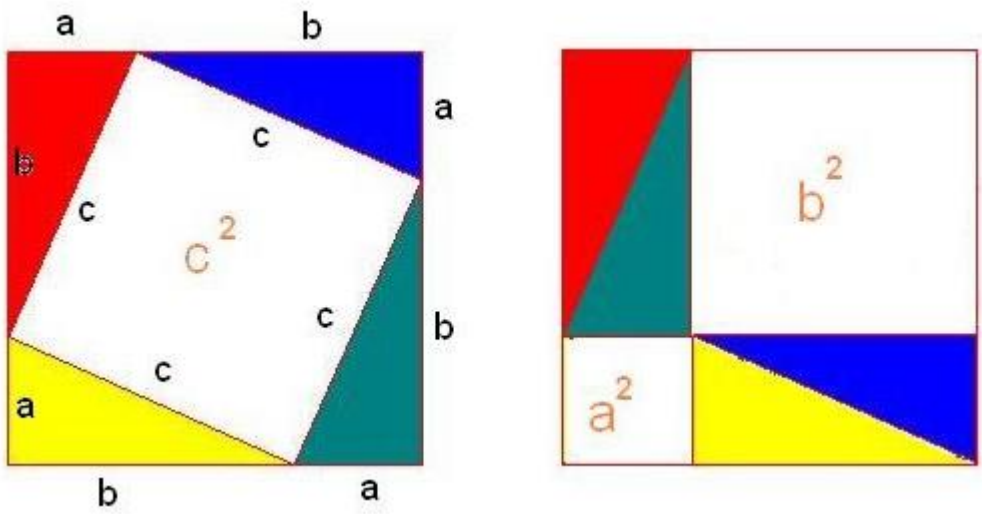
Επίσης σύμφωνα με την παράδοση, μετά την ανακάλυψή του αυτή θυσίασε προς τους θεούς εκατόμβη (100 βόδια), γι' αυτό και το θεώρημα αυτό ονομάσθηκε «Εκατόμβη» ή «Θεώρημα εκατόμβης».

Ισχύει και το αντίστροφο Πυθαγόρειο Θεώρημα: ότι δηλαδή, αν ισχύει η παραπάνω σχέση μεταξύ των πλευρών ενός τριγώνου, $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Χωρίς να έχει οριστεί η έννοια της «δύναμης» με την σημερινή της μορφή, ο Πυθαγόρας δεν θα μπορούσε να γράψει την σχέση $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$.

Χρησιμοποίησε λοιπόν το παρακάτω σχήμα, εξηγώντας πως το εμβαδόν των δύο μικρότερων τετραγώνων ισούται ακριβώς με το εμβαδόν του μεγαλύτερου.

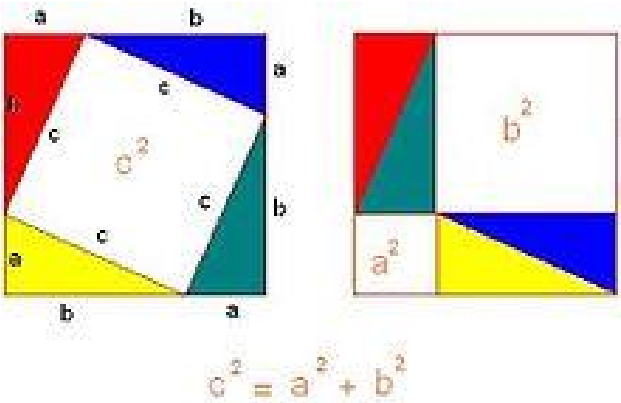
Μια τεράστια μαθηματική ανακάλυψη για τα δεδομένα της εποχής, είχε αποτυπωθεί σε αυτό το απλό σχήμα. Καθένα από τα δύο μεγάλα τετράγωνα της εικόνας περιέχει τέσσερα ίσα τρίγωνα, γεγονός που σημαίνει πως η λευκή περιοχή των δύο τετραγώνων πρέπει να έχει ίσο εμβαδόν.



Αποδείξεις του πυθαγόρειου θεωρήματος

Αρχαιότητα

- **Πυθαγόρεια απόδειξη**

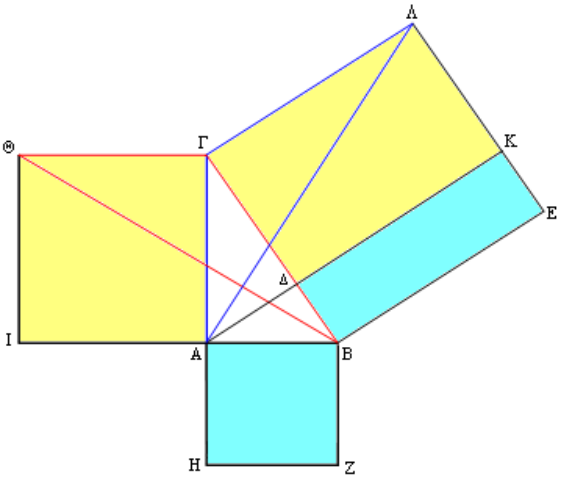


Το πυθαγόρειο θεώρημα ήταν γνωστό πολύ πριν τον Πυθαγόρα, αλλά φαίνεται να είναι αυτός ο πρώτος που κατάφερε να το αποδείξει. Σε κάθε περίπτωση, η απόδειξη που του αποδίδεται είναι πολύ απλή και ονομάζεται απόδειξη με ανακατανομή.

Καθένα από τα δύο μεγάλα τετράγωνα της εικόνας περιέχει τέσσερα ίσα τρίγωνα και η μόνη διαφορά τους είναι ότι τα τετράγωνα κατανέμονται διαφορετικά. Για αυτό το λόγο, η λευκή περιοχή των δύο τετραγώνων πρέπει να έχει ίσο εμβαδόν. Ο υπολογισμός των εμβαδών των λευκών περιοχών, οδηγεί στο πυθαγόρειο θεώρημα και αποδεικνύει το ζητούμενο.

Το γεγονός ότι αυτή η πολύ απλή απόδειξη αποδίδεται στον Πυθαγόρα, συχνά αναφέρεται σε συγγράμματα του μεταγενέστερου Έλληνα φιλόσοφου και μαθηματικού, Πρόκλου.

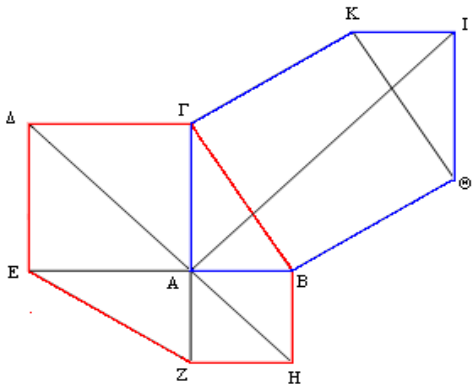
- **Ευκλείδεια απόδειξη**



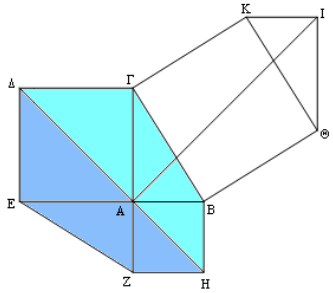
Η απόδειξη του Ευκλείδη είναι γεωμετρική και στηρίζεται στο διπλανό σχήμα. Ο Ευκλείδης απέδειξε ότι τα τετράγωνα ΑΓΘΙ και ΑΒΖΗ έχουν το ίδιο εμβαδόν με τα ορθογώνια ΓΛΚΔ και ΒΔΚΕ αντίστοιχα. Για την απόδειξη της πρώτης ισεμβαδικότητας χρησιμοποίησε την ισότητα των τριγώνων ΒΓΘ και ΑΓΛ και το ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΘ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τετραγώνου ΑΓΘΙ, επειδή έχουν την ίδια βάση ΘΓ και η κορυφή Β είναι σημείο της ευθείας ΙΑ, η οποία είναι παράλληλη της ΘΓ. Για τον ίδιο λόγο και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΛ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου ΓΛΚΔ . Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται και η ισεμβαδικότητα των στχημάτων ΑΒΖΗ και ΒΔΚΕ

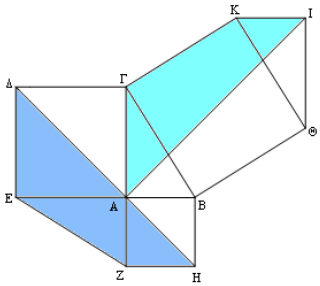
Νεότερη εποχή

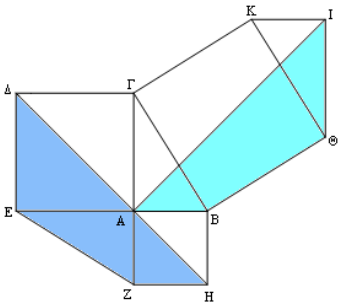
- **Leonardo Da Vinci**



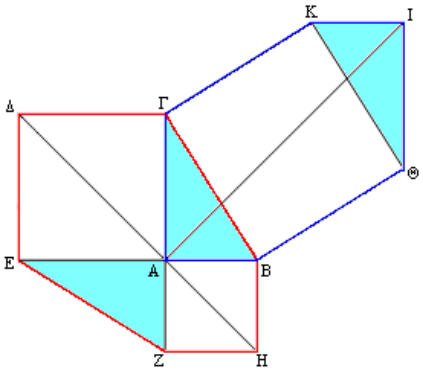
Η απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος που αποδίδεται στον μεγάλο Ιταλό ζωγράφο, καλλιτέχνη και επιστήμονα της Αναγέννησης Leonardo da Vinci στηρίζεται στο παραπάνω σχήμα. Τα εξάγωνα ΔΓΒΗΖΕ (κόκκινο χρώμα) και ΑΓΚΙΘΒ (μπλε χρώμα) είναι ισεμβαδικά, επειδή τα τετράπλευρα ΕΔΗΖ, ΔΓΒΗ, ΑΓΚΙ και ΑΙΘΒ είναι ίσα μεταξύ τους. Βασική σχέση για την απόδειξη της ισότητας των τετραπλεύρων αυτών είναι η ισότητα των οξειών γωνιών τους όπου κάθε μία είναι 45° . Αυτό, για μεν τα τετράπλευρα ΕΔΗΖ, ΔΓΒΗ είναι προφανές, για δε τα ΑΓΚΙ και ΑΙΘΒ αποδεικνύεται σχετικά εύκολα. Εποπτικά η ισότητα των τετραπλεύρων αυτών φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.





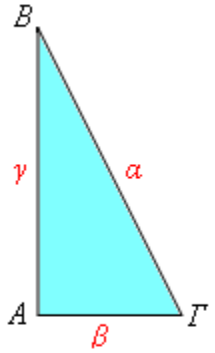


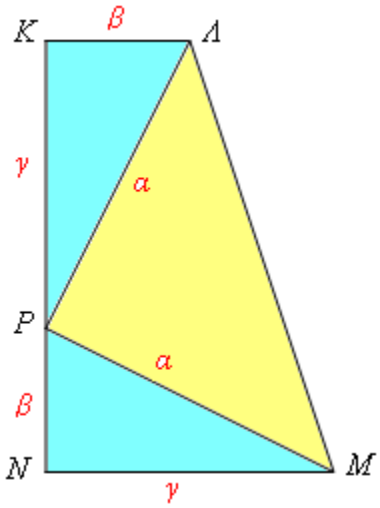
Αν, τώρα, από τα ισεμβαδικά εξάγωνα ΔΓΒΗΖΕ και ΑΓΚΙΘΒ αφαιρέσουμε τα ίσα τρίγωνα ΑΒΓ (κοινό), ΑΖΕ και ΙΘΚ, τότε προκύπτει το συμπέρασμα του Πυθαγορείου θεωρήματος.



- **James Abram Garfield**

Ο James Abram Garfield το 1876 για το Πυθαγόρειο θεώρημα έδωσε μία πολύ ωραία αλγεβρική απόδειξη, η οποία στηρίζεται στο παραπάνω τραπέζιο.





Η απόδειξη προκύπτει αν εκφράσουμε το εμβαδόν του τραπεζίου ΚΛΜΝ με δύο τρόπους, με τον τύπο του εμβαδού του τραπεζίου και ως άθροισμά των εμβαδών των ορθογωνίων τριγώνων ΚΛΡ, ΡΛΜ και ΝΡΜ που το διαμερίζουν. Έτσι έχουμε:

$$(K\Lambda MN) = \frac{(\gamma+\beta)(\beta+\gamma)}{2} = \frac{\beta\gamma}{2} + \frac{\beta\gamma}{2} + \frac{\alpha^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma = 2\beta\gamma + \alpha^2$$
$$\Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$$

- **Albert Einstein**

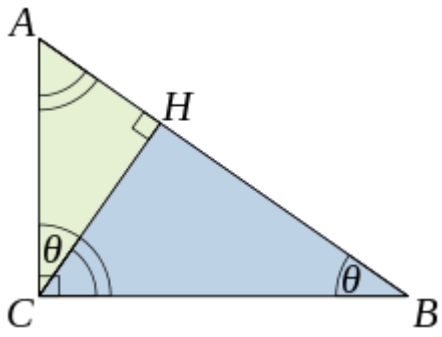
Ο πασίγνωστος φυσικός Albert Einstein σε ηλικία μόλις 12 ετών μπόρεσε με δικό του τρόπο να αποδείξει το πυθαγόρειο θεώρημα! Για την απόδειξή του χρησιμοποίησε την ομοιότητα τριγώνων που θα αναλύσουμε παρακάτω.

Άλλες αποδείξεις του θεωρήματος

Το πυθαγόρειο θεώρημα ίσως έχει περισσότερες αποδείξεις από κάθε άλλο (με το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας να είναι επίσης υποψήφιο για αυτή τη διάκριση): το βιβλίο *Η Πυθαγόρεια Πρόταση* περιέχει 370 αποδείξεις.

=

- **Απόδειξη με ομοιότητα τριγώνων**



Η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι ο λόγος δύο οποιονδήποτε αντιστοίχων πλευρών όμοιων τριγώνων, είναι σταθερός, ανεξάρτητα από το μέγεθος των τριγώνων.

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ABC, με ορθή γωνία τη C όπως φαίνεται και στο σχήμα. Φέρω το ύψος από τη γωνία C και ονομάζω H το σημείο τομής του με την AB. Το σημείο H χωρίζει την υποτείνουσα σε δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη δ και ε. Το καινούριο τρίγωνο ACH είναι όμοιο με το τρίγωνο ABC, αφού και τα δύο είναι ορθογώνια (λόγω του ορισμού του ύψους) και έχουν κοινή τη γωνία A, πράγμα που σημαίνει ότι η τρίτη γωνία είναι επίσης ίση στα δύο τρίγωνα (στο σχήμα συμβολίζεται με θ). Ομοίως, το τρίγωνο CBH είναι επίσης όμοιο με το ABC. Η ομοιότητα των τριγώνων οδηγεί στην ισότητα των λόγων των αντίστοιχων πλευρών

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC}$$

και

$$\frac{BC}{AB} = \frac{BH}{BC}$$

Το πρώτο κλάσμα ισούται με το συνημίτονο της γωνίας θ και το δεύτερο με το ημίτονο. Οι παραπάνω λόγοι μπορούν να γραφτούν και ως εξής:

$$AC^2 = AB \cdot AH \quad \text{και} \quad BC^2 = AB \cdot BH$$

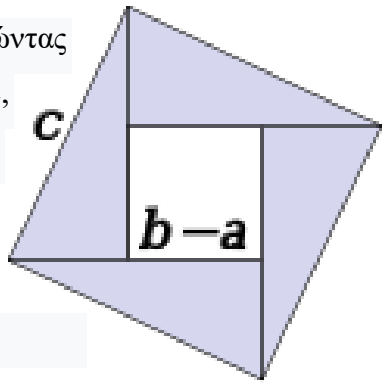
Προσθέτοντας τις δύο ισότητες, καταλήγουμε:

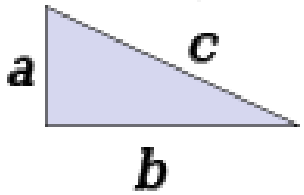
$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AH + AB \cdot BH = AB\left(AH + HB\right) = AB \cdot AB = AB^2$$

Ο ρόλος αυτής της απόδειξης στην ιστορία είναι ένα θέμα για πολλή σκέψη. Το ερώτημα που προκύπτει είναι γιατί ο Ευκλείδης δεν χρησιμοποίησε αυτήν την απόδειξη, αλλά εφηύρε άλλη. Μία υπόθεση είναι ότι η απόδειξη με όμοια τρίγωνα συμπεριλαμβάνει μία θεωρία αναλογιών, η οποία δεν εμφανίζεται παρά μόνο αργότερα στα *Στοιχεία* και εκείνη την εποχή χρειαζόταν πολύ περισσότερη ανάπτυξη.

- **Αλγεβρικές αποδείξεις**

Το θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί αλγεβρικά χρησιμοποιώντας τέσσερα ορθογώνια τρίγωνα με πλευρές a,b και c, τοποθετημένες μέσα σε ένα τετράγωνο πλευράς c όπως στο πάνω σχήμα. Τα τρίγωνα είναι ίδια με εμβαδόν $\frac{1}{2}$ab, ενώ το μικρό τετράγωνο έχει πλευρά b-a και εμβαδόν $(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2$. Επομένως το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου είναι:

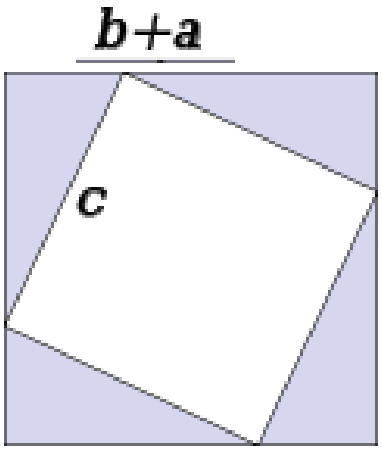




$$(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2+4\frac{\mathrm{ab}}{2}=(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2+2\mathrm{ab}=\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2$$

Αλλά είναι τετράγωνο πλευράς c και εμβαδού c^2, οπότε

$$c^2=a^2+b^2$$



Μία παρόμοια απόδειξη χρησιμοποιεί τέσσερα ίδια τρίγωνα τοποθετημένα συμμετρικά γύρω από ένα τετράγωνο πλευράς c. Έτσι δημιουργείται ένα μεγαλύτερο τετράγωνο με πλευρά $a+b$ και εμβαδόν $(a+b)^2$. Τα τέσσερα τρίγωνα και το τετράγωνο πλευράς c πρέπει να έχουν ίσο εμβαδόν με το μεγαλύτερο τετράγωνο,

$$(b+a)^2=c^2+4\frac{ab}{2}=c^2+2ab$$

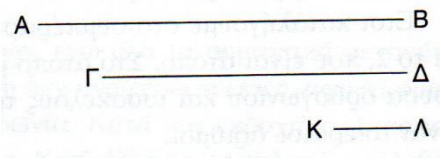
επομένως

$$c^2=(b+a)^2-2ab=a^2+b^2$$

Το Πυθαγόρειο θεώρημα και τα ασύμμετρα μεγέθη

i. Τα σύμμετρα μεγέθη

Όταν οι Πυθαγόρειοι ισχυρίζονταν πως τα ομοειδή μεγέθη είναι σύμμετρα, εννοούσαν ότι για οποιοδήποτε πλήθος ομοειδών μεγεθών υπάρχει πάντοτε ένα κατάλληλο μέγεθος, ομοειδές με τα προηγούμενα, το οποίο χωράει ακριβώς, δηλαδή ακέραιες στο πλήθος φορές, σε όλα τα μεγέθη του πλήθους.



Αν, για παράδειγμα, ΑΒ και ΓΔ είναι δυο ευθύγραμμα τμήματα, τότε διαισθητικά είναι ισχυρότατη η εντύπωση πως οπωσδήποτε υπάρχει κάποιο κατάλληλο μικρό τμήμα, ας το ονομάσουμε ΚΛ, το οποίο χωράει ακριβώς ακέραιες φορές και στο ΑΒ και στο ΓΔ.

Αν στο ΑΒ, χωράει μ ακέραιες μονάδες και στο ΓΔ ν ακέραιες φορές, τότε έχουμε:

$\text{ΑΒ} = \mu \cdot \text{ΚΛ}$ και $\text{ΓΔ} = \nu \cdot \text{ΚΛ}$

Στην περίπτωση αυτή ονομάζουμε «λόγο» του ΑΒ δια του ΓΔ, και γράφουμε συμβολικά, το πηλίκο: $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\mu}{\nu}$ δηλαδή τον ρητό αριθμό $\frac{\mu}{\nu}$.

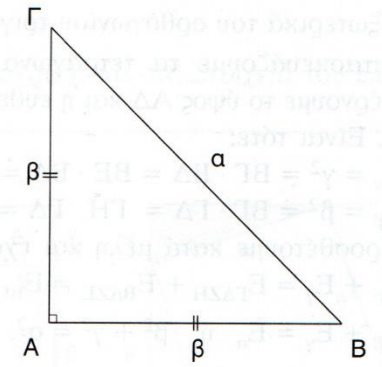
Άρα αν τα δυο μεγέθη έχουν κοινό μέτρο, δηλαδή είναι σύμμετρα, τότε ο λόγος είναι ρητός.

Η παραδοχή των πυθαγορείων πως τα ομοειδή μεγέθη είναι σύμμετρα, σημαίνει πως οι λόγοι είναι ρητοί αριθμοί και ακριβώς σε αυτή την βολική, αλλά καθώς αποδείχτηκε, λαθεμένη βάση στήριξαν την θεωρία τους για τις αναλογίες, τα εμβαδά και τα όμοια σχήματα.

ii. Η ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών

Τι συνέβη όμως μετά την ανακάλυψη πως το μήκος α της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου και τα μήκη β, γ των κάθετων πλευρών συνδέονται με την σχέση $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$.

Η πυθαγόρεια σχέση $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$ σε ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο (β = γ) γίνεται: $2\beta^2=\alpha^2$ και αν δεχτούμε τα ομοειδή μεγέθη σύμμετρα, οι αριθμοί α, β είναι ακέραιοι.



Ονομάζουμε δ τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των α, β τότε:

$\frac{\alpha}{\delta}=\kappa$ και $\frac{\beta}{\delta}=\lambda$ με κ, λ πρώτους μεταξύ τους.

Τότε η σχέση $2\beta^2=\alpha^2$ γίνεται: $2\delta^2\lambda^2=\delta^2\kappa^2 \Leftrightarrow 2\lambda^2=\kappa^2$ (1)

Το πρώτο μέλος της (1) διαιρείται με το 2, άρα και το δεύτερο διαιρείται με το 2, <u>άρα ο κ διαιρείται με το 2</u>, δηλαδή θα είναι της μορφής

$\kappa=2\mu$, όπου μ ακέραιος, οπότε η (1) γίνεται:

$2\lambda^2=(2\mu)^2 \Leftrightarrow 2\lambda^2=4\mu^2 \Leftrightarrow \lambda^2=2\mu^2$ (2)

Το δεύτερο μέρος της (2) διαιρείται με το 2 που σημαίνει ότι και το πρώτο θα διαιρείται με το 2, <u>άρα το λ θα διαιρείται με το 2</u>.

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι πρώτοι μεταξύ τους ακέραιοι κ,λ διαιρούνται με το 2, που είναι άτοπο.

Στο άτοπο μας οδήγησε η υπόθεση πως οι κάθετες πλευρές και η υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι μεγέθη σύμμετρα και επομένως τα μέτρα τους είναι ακέραιοι.

Επομένως η κάθετη πλευρά και η υποτείνουσα ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου, δηλαδή η πλευρά και η διαγώνιος τετραγώνου, δεν είναι σύμμετρες. Άρα είναι <u>ασύμμετρες.</u>

Η παράδοση αναφέρει ότι οι πυθαγόρειοι, αμήχανοι, κράτησαν μυστικό το «σκάνδαλο» που ανέτρεπε τη βάση των θεωριών τους και πως ο Ίππασος τιμωρήθηκε σκληρά από τους πυθαγόρεια κοινότητα επειδή αποκάλυψε αυτό το καταλυτικό για την φιλοσοφία τους μυστικό, δηλαδή την ύπαρξη ασύμμετρων μεγεθών.

Το θεωρητικό αδιέξοδο που προκάλεσε η ανακάλυψη των ασύμμετρων λύθηκε από τον Εύδοξο, γύρω στο 370 π.χ όπου όρισε τους λόγους των ασύμμετρων τμημάτων και για πρώτη φορά, έμμεσα τους άρρητους αριθμούς.

Η χρυσή τομή

Το πρόβλημα της διαίρεσης ευθυγράμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο εμφανίστηκε για πρώτη φορά στα στοιχεία του Ευκλείδη (2ο και 4ο βιβλίο). Έκτοτε, στη διαδρομή της ιστορίας και για διάφορους λόγους, αυτή η κατασκευή προκάλεσε το ενδιαφέρον των γεωμετρών ως κάτι το εξαιρετικά χρήσιμο ή ωραίο (θεϊκή αναλογία κατά τον Pacioli), αλλά και μυστηριώδες (κατά τον Kepler).

Τον 18ο αιώνα, υπό την επίδραση της αναπτυσσόμενης θεωρίας των συνεχών κλασμάτων, αποκαλείται πρόβλημα της **συνεχούς διαίρεσης**, ενώ στις αρχές του 19ου αιώνα ονομάζεται **χρυσή τομή**.

Από αισθητικής πλευράς, η χρυσή τομή αποτελεί την πλέον αποδεκτή αναλογία στην γλυπτική, στην αρχιτεκτονική, εμφανίζεται στην φύση σε διάφορους βιολογικούς σχηματισμούς, πχ η διάταξη των φύλλων σε ένα κλωνάρι, οι αναλογίες του ανθρώπινου σώματος κλπ, οι οποίες θεωρούνται ιδανικές, όταν υπόκεινται στον νόμο της χρυσής τομής.

Από φιλοσοφική πλευρά, η διαίρεση τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο, παρουσιάζει την ιδιότητα της ισοδυναμίας του όλου με το μέρος, η οποία χαρακτηρίζει τα απειροσύνολα.

Η ισοδυναμία του όλου με το μέρος της διαίρεσης τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο είναι φανερή από τον ορισμό αυτής της διαίρεσης, αλλά και τυπικά ως εξής:

Αν το σημείο Δ διαιρεί το τμήμα ΑΒ σε μέσο και άκρο λόγο και το ΑΔ είναι μεγαλύτερο από το ΑΒ, τότε ο λόγος $\varphi = \frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Delta}{\Delta B}$ ικανοποιεί την ισότητα:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \qquad (1)$$

Το φ στον παρονομαστή του δεύτερου μέλους της (1) , δηλαδή το μέρος, είναι ισοδύναμο με ολόκληρο το δεύτερο μέλος και η (1) γράφεται διαδοχικά:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}} = ...$$

Δεν είναι όμως η χρυσή τομή η μοναδική σχέση στην οποία το όλο και το μέρος είναι ισοδύναμα δηλαδή η σχέση που μπορεί να αναλυθεί σε μια ακολουθία αριθμητικών πράξεων.

Αυτό συμβαίνει στην οποιαδήποτε ισότητα, για παράδειγμα η ισότητα $4x = 1$ η οποία γράφεται:

$$x = 1 - 3x = 1 - 3(1 - 3x) = 1 - 3\left[1 - 3(1 - 3x)\right] = 1 - 3\left\{1 - 3\left[1 - 3(1 - 3x)\right]\right\}$$

δηλαδή:

$$x = 1 - 3 + 9 - 27 + 81x \quad (2)$$

Διαφορετικά η (2) γράφεται:

$$x = 3^0 - 3^1 + 3^2 - 3^3 + 3^4 x = (-1)^0 \cdot 3 + (-1)^1 \cdot 3 + (-1)^2 \cdot 3 + (-1)^3 \cdot 3 + (-1)^4 \cdot 3^4 x$$

Και γενικά:

$$x = (-1)^0 \cdot 3 + (-1)^1 \cdot 3 + (-1)^2 \cdot 3 + (-1)^3 \cdot 3 + ... + (-1)^\nu \cdot 3^\nu x$$

Δηλαδή η $x = 1 - 3x$ αναλύεται σε μια εναλλάσσουσα σειρά.

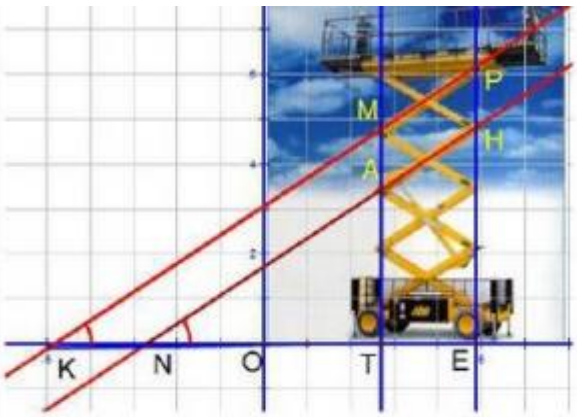
Πυθαγόρειο θεώρημα Σπουδαιότητα

Το Πυθαγόρειο θεώρημα… στη ζωή μας!

Η ζωή μας είναι γεμάτη από ορθές γωνίες και ορθογώνια τρίγωνα. Γνωστό είναι ότι κάθε τρίγωνο καθώς επίσης και όλα τα επίπεδα σχήματα, που δεν έχουν καμπύλες πλευρές, μπορούν να χωριστούν σε ορθογώνια τρίγωνα.

Αυτός είναι ο λόγος που το Πυθαγόρειο Θεώρημα (και το αντίστροφό του) χρησιμοποιούνται στην καθημερινή μας ζωή.

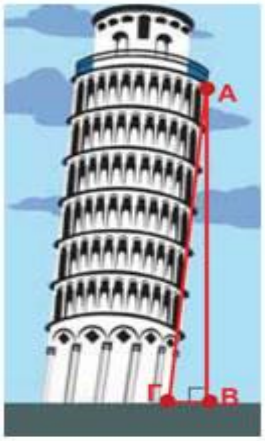
- Μαθητές και καθηγητές το εφαρμόζουν σε ασκήσεις και προβλήματα.
- Αρχιτέκτονες και μηχανικοί δημιουργούν σχέδια και κατασκευές
- Διακοσμητές, σχεδιαστές και ζωγράφοι το εφαρμόζουν καθημερινά στην εργασία τους.
- Αστυνομία όταν ερευνούν τις θέσεις θύματος και θύτη
- Ακόμα, στα gps βοηθώντας τον προσανατολισμό. Η NASA το εκμεταλλεύεται για να εντοπίσει τη θέση ενός διαστημοπλοίου.
- Χτίστες, Μαραγκοί, αγρότες, κηπουροί οικοδόμοι και κατασκευαστές το εφαρμόζουν χωρίς πολλές φορές να το γνωρίζουν.
- Ακόμα και οι παίκτες του μπιλιάρδου, οι νοικοκυρές και οι πυροσβέστες το χρησιμοποιούν καθημερινά!



Χρησιμοποιείται:

- Στην αστρονομία ,NASA
- Οικοδομικές , αγροτικές εργασίες
- Αρχιτέκτονες
- Σχεδιαστές

- Μηχανικοί
- Μαραγκοί
- Χτίστες
- Φυσικοί
- Αστυνομία



ΠΗΓΕΣ

1) Αργυρόπουλος, Κατσούλης, Μαρκάτης, Σιδέρης (2017). Ευκλείδεια Γεωμετρία – Τεύχος Β. ΙΤΥΕ Διόφαντος

2) Γεωργάκης – Δημητρόπουλος – Μακρίδης (2001). Ευκλείδεια Γεωμετρία Β΄ Ενιαίου Λυκείου. Πατάκης

3) https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A0%CF%85%CE%B8%CE%B1%CE%B3%CF%8C%CF%81%CE%B5%CE%B9%CE%BF_%CE%B8%CE%B5%CF%8E%CF%81%CE%B7%CE%BC%CE%B1

4) http://www.p-theodoropoulos.gr/ergasies/mathimat-pithag.pdf

5) https://www.slideshare.net/lykvam/3-95677455

6) https://prezi.com/gpdptxsyfepy/presentation/

7) https://el.wikipedia.org/wiki/Πυθαγόρειο_θεώρημα

8) http://www.p-theodoropoulos.gr/ergasies/mathimat-pithag.pdf

9) https://www.youtube.com/watch?v=6QMHHEd1UKs

Για την εργασία αυτή εργάστηκαν οι ομάδες των μαθητών της Β΄Λυκείου του 5ου ΓΕΛ Τρικάλων

Μπάκας Δημήτρης	Μπλαντή Αθανασία	Ζήκος Κωνταντίνος
Μπακίου Φιορέλα	Λύπα Μαρία	Κυριακόπουλος Μάριος
Γαλάνη Μαρία	Γκούμα Δέσποινα	Λαγάρας Αθανάσιος
Μίσιου Δέσποινα	Κοντοκλώτση Γιολάντα	Γαλάνης Χρήστος

Καλτσούδα Φωτεινή

Καλτσούδα Χρύσα

Υπεύθυνος Καθηγητής

Ι. Πατέρας

Μαθηματικός